BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

CLASA a XI-a

1. Fie sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} mx+y-z=1 \\ x+y-z=2 \\ -x+y+z=0 \end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât matricea sistemului să aibă rangul 2.

b) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât sistemul să aibă soluții $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$ care verifică relația $x_0+y_0+z_0=4$.

c) Să se determine $m\in\mathbb{Z}$ astfel încât sistemul să aibă o soluție unică $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{Z}^3$.

Varianta 98, BAC

Barem:

a) Matricea sistemului A conține un minor de ordin 2 nenul, spre exemplu $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=2\Rightarrow \text{rang}(A)\geq 2$	1 p
Obține $\text{rang}(A)=2\Leftrightarrow \det A=0\Leftrightarrow 2(m-1)=0\Leftrightarrow m=1$	1 p
b) Rezolvă sistemul format din ecuația $x+y+z=4$ și ultimele două ecuații ale sistemului	1 p
Obține $x_0=2, y_0=z_0=1$ și $m=\frac{1}{2}$	1 p
c) Observă că în cazul $m=1$ sistemul este incompatibil	1 p
Rezolvă sistemul în cazul $m\neq 1$ și obține $x=-\frac{1}{m-1}, y=1, z=-\frac{m}{m-1}$	1 p
Finalizare $m\in\{0,2\}$	1 p

2. Să se rezolve ecuația $\sin x\cos^2 x=\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

Revista Sinus 1(25) / 2013

Barem:

Observă că $\sin x>0$	1 p
Ecuația se reduce la rezolvarea ecuației $t-t^3=\frac{2\sqrt{3}}{9}$, unde $t=\sin x\in(0,1)$	1 p
Consideră funcția $f:(0,1)\to\mathbb{R}, f(t)=t^3-t+\frac{2\sqrt{3}}{9}, f'(t)=3t^2-1$	1 p
Din tabelul de variație găsește că $f(t)\geq 0,\forall t\in(0,1)$, cu egalitate când $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$	2 p
Obține că $\sin x\cos^2 x\leq\frac{2\sqrt{3}}{9}$, cu egalitate când $\sin x=\frac{1}{\sqrt{3}}$	1 p
Finalizare $x\in\left\{\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\pi-\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$	1 p

3. Să se arate că $\sqrt{n}+\sqrt[n]{n}>\sqrt[3]{n}+\sqrt[n-1]{n}$, pentru orice număr natural $n\geq 7$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Barem:

Observă că $\sqrt{n}+\sqrt[n]{n}-\sqrt[3]{n}-\sqrt[n-1]{n}=\left(n^{\frac{1}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{2}}+\left(n^{\frac{1}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}}-\left(n^{\frac{1}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{3}}-n^{\frac{1}{n-1}}$	1 p
Pentru $n\geq 7$ fixat consideră funcția $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x^{\frac{n-1}{2}}+x^{\frac{n-1}{n}}-x^{\frac{n-1}{3}}-x$	1 p
Observă că inegalitatea cerută este echivalentă cu $f\left(n^{\frac{1}{n-1}}\right)>0$	1 p

Obține $f'(x)=\frac{n-1}{2}x^{\frac{n-3}{2}}+\frac{n-1}{n}x^{-\frac{1}{n}}-\frac{n-1}{3}x^{\frac{n-4}{3}}-1$	1 p
Rescrie $f'(x)=\frac{n-1}{3}x^{\frac{n-4}{3}}\left(\frac{3}{2}x^{\frac{n-1}{6}}-1\right)-1+\frac{n-1}{n}x^{-\frac{1}{n}}$	1 p
Pentru $x>1$ obține $f'(x)>\frac{n-1}{3}\left(\frac{3}{2}-1\right)-1=\frac{n-7}{6}\geq 0$ și deduce că f strict crescătoare pe $[1,\infty)$	1 p
Finalizează $f\left(n^{\frac{1}{n-1}}\right)>f(1)=0$ (deoarece $n^{\frac{1}{n-1}}>1$)	1 p

Orice altă rezolvare corectă va fi punctată corespunzător.